Le Carreleur contre-attaque

Année 2015 - 2016

Noms et Prénoms des élèves, niveaux :

Lucile NAEGELE, Coline GIRAUD, Mohammed DJABRIL, Alicia DEFAY (seconde)
Juliette CONSTANS, Jaya PARGADE-KLITZKE (Terminale)

Établissements :

Lycée Michel Montaigne - BORDEAUX
Lycée Sud-Médoc – LE TAILLAN MEDOC

Enseignants :

Mathieu CLAUDEL, Jean-Pierre HAUR, Sandra COUROSSE, Nicolas JOUSSE

Chercheuse de l'université de Bordeaux :

Christine BACHOC

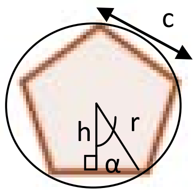
Présentation du sujet :

Le pavage du plan par des triangles, des rectangles ou des hexagones est un problème classique et connu depuis longtemps. Qu'en est-il avec des pentagones?

Après une présentation succincte des propriétés géométriques du pentagone régulier, nous proposerons quatre agencements différents pour paver le plan avec des pentagones réguliers identiques.

Il semble impossible de paver complètement le plan, mais nous donnerons une approximation du taux de remplissage maximal que nos configurations permettent d'obtenir.

I- Outils mathématiques utilisés



Ceci est un carreau, soit pentagone de base, que nous appellerons « élémentaire ».

On le considère inscrit dans un cercle trigonométrique.

Par conséquent, il est de « rayon » : **r = 1**.

L'angle α mesure alors : $\alpha = (360/5)/2 = 36°$

Ou : **α** = $[(2\pi)/5]/2$ = **$\pi/5$ rad**

On a : $\cos(\alpha) = h/r$

La hauteur h mesure donc : **h** = $r \times \cos(\alpha) = \cos(\alpha)$ = **$\cos(\pi/5)$**

De plus : $\sin(\alpha) = (c/2)/r$

Donc un côté c mesure: **c** = $2r \times \sin(\alpha)$ = **$2\sin(\pi/5)$**

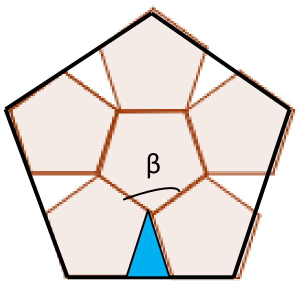
Soit A_{tri}, l'aire du triangle de côtés r, h et (c/2), comme sur le dessin : $A_{tri} = [h \times (c/2)]/2$, soit :

A_{tri} = **$[\cos(\pi/5) \times \sin(\pi/5)]/2$**

On cherche alors à calculer l'aire d'un pentagone élémentaire :

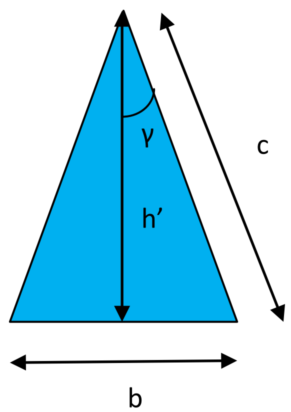
$A_{él}$ $= 5 \times 2 \times A_{tri}$ = **$5 \times \cos(\pi/5) \times \sin(\pi/5)$**

II- Premier essai : la disposition en fleur



Une fleur

Ici, le motif de base est un pentagone (dessiné en noir), obtenu grâce à une disposition florale des pentagones de base. (1)



1) On calcule l'aire d'un triangle perdu, en bleu sur le dessin :

Pour cela, il nous faut connaître l'angle β, sur le dessin ci-dessus.

On peut observer que : $2\alpha + (\beta/2) + (\beta/2) = \pi$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\beta = \pi - 2\alpha}$soit : $\beta = \pi - (2\pi/5) = 3\pi/5$ rad

On observe alors que : $3 \times \beta + 2\gamma = 2\pi$

$\Leftrightarrow 2\boldsymbol{\gamma} = 2\pi - 3\beta = 2\pi - 3\pi + 6\alpha = 6\alpha - \pi = (6\pi/5) - \pi = \boldsymbol{\pi/5}$ **rad**

Donc : $\cos(\gamma) = h'/c \Leftrightarrow \boldsymbol{h'} = c \times \cos(\gamma) = \boldsymbol{2\sin(\pi/5) \times \cos(\pi/10)}$

De plus : $\sin(\gamma) = (b/2)/c \Leftrightarrow \boldsymbol{b} = 2c \times \sin(\pi/10) = 4\boldsymbol{\sin(\pi/5)\sin(\pi/10)}$

Soit A_{p1}, l'aire perdue par le triangle bleu :

$\boldsymbol{A_{p1}} = (b \times h')/2 = 4\sin^2(\pi/5) \times \sin(\pi/10) \times \cos(\pi/10)$

2) On calcule l'aire totale du grand pentagone, A_T :

$A_T = 5 \times A_{P1} + 6 \times A_{él} = 20 \times \sin^2(\pi/5) \times \cos(\pi/10) \times \sin(\pi/10) + 30 \times \cos(\pi/5) \times \sin(\pi/5)$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{A_T} = 10\boldsymbol{\sin(\pi/5)[\, 2\cos(\pi/10)\sin(\pi/10)\sin(\pi/5)+3\cos(\pi/5)]}$

3) On calcule l'aire occupée par les carreaux, $A_{Occupée}$:

$\boldsymbol{A_{Occupée}} = 6 \times A_{él} = 30\boldsymbol{\cos(\pi/5)\sin(\pi/5)}$

4) On calcule le rapport :

$\eta = [30\cos(\pi/5)\sin(\pi/5)\,] / [10\boldsymbol{\sin(\pi/5)[\, 2\cos(\pi/10)\sin(\pi/10)\ \sin(\pi/5)+3\cos(\pi/5)\,]\,]} \times 100$

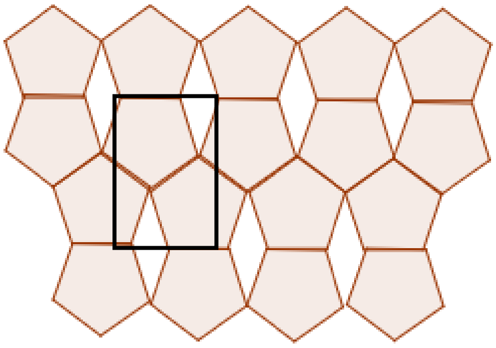
$\boxed{\boldsymbol{\eta \approx 87{,}53\ \%}}$

Le pourcentage d'occupation est plutôt intéressant, puisqu'il engendre que (100-87,53), soit environ 12,46 % de pertes.

Néanmoins, un problème semble se poser quant au choix de cette disposition. En effet, on souhaite une disposition qui puisse être réitérée à l'infini. Or, si l'on réitère cette configuration en suivant toujours le même modèle floral, en considérant chaque nouveau grand pentagone comme un pentagone élémentaire, la taille des pertes s'agrandit considérablement. On peut espérer combler ces pertes croissantes avec les petits pentagones élémentaires, mais cela rend très difficile un réel calcul de pertes sur une surface infinie.

C'est pour cela que l'on va chercher une configuration qui comporte un motif réitérable à l'infini.

III- Deuxième essai : la disposition en lignes



Le motif répétitif que l'on repère dans cette configuration est un rectangle, dessiné en noir ci-contre.

1) Calcul de l'aire totale du motif répétitif, A_T :

On constate que le rectangle répétitif est constitué de deux pentagones et de deux triangles (dont nous avons calculé l'aire précédemment). Par conséquent, on a :

$A_T = 2A_{él} + 2A_{p1} = 10\sin(\pi/5)\cos(\pi/5) + 4\sin^3(\pi/5)$

⬄ $\mathbf{A_T = 2\sin(\pi/5) \times [\ 5\cos(\pi/5) + 2\sin^2(\pi/5)\ ]}$

2) Calcul de l'aire occupée, $A_{Occupée}$:

$\mathbf{A_{Occupée}} = 2A_{él} = \mathbf{10\cos(\pi/5)\sin(\pi/5)}$

3) Calcul du rapport :

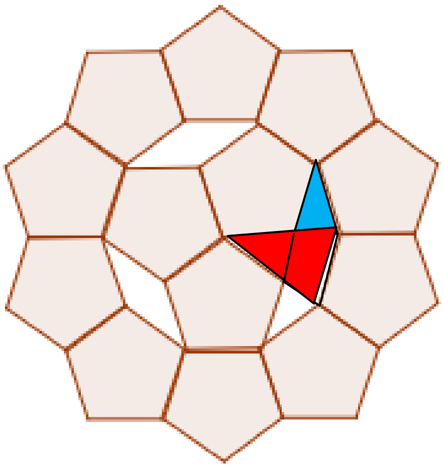
$\eta = [\ 10\cos(\pi/5)\sin(\pi/5)\ ] / [2\sin(\pi/5) \times [\ 5\cos(\pi/5) + 2\sin^2(\pi/5)\ ]\ ] \times 100$

⬄ $\boxed{\eta \approx 85{,}41\ \%}$

Le rapport est presque identique à celui de la configuration florale. Cela semble logique, car dans les deux cas, pour un pentagone placé, on a « presque » un triangle de perte.

En revanche, on constate que le motif répétitif **est réitérable à l'infini**. Cette configuration est donc simple, pratique et efficace !

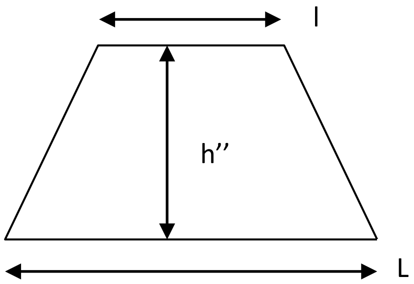
IV- Troisième essai : la disposition en cercles (2)



Ici, on considérera uniquement les pertes au centre du « cercle »formé, puisqu'on observe qu'il est possible d'emboîter les cercles.

On peut ici décomposer les pertes en triangles (en bleu) et en un trapèze. (3) L'aire d'un triangle bleu nous est connue ; on cherche à déterminer celle du trapèze.

1) Calcul de l'aire du trapèze

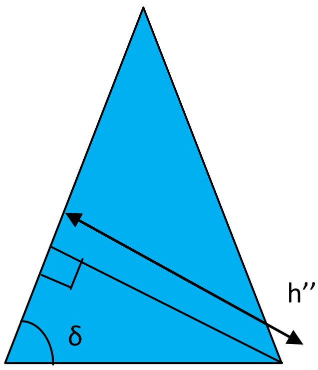


$l = b = 4\sin(\pi/5)\sin(\pi/10)$

$L = c = 2\sin(\pi/5)$

$A_{\text{trapèze}} = [\ (l+L) \times h''\ ] / 2 = h''\sin(\pi/5) \times [\ 2\sin(\pi/10) + 1\ ]$

On a :



$2\delta + 2\gamma = \pi \Leftrightarrow \delta = (\pi-2\gamma)/2 \Leftrightarrow \boldsymbol{\delta = 2\pi/5}$ **rad**

De plus : $\sin(\delta) = h''/b$

$\Leftrightarrow$ **h''** $= b \times \sin(\delta) = 4\boldsymbol{\sin(\pi/5)\sin(\pi/10)\times \sin(2\pi/5)}$

D'où : $A_{\text{trapèze}} = 4\sin^2(\pi/5)\sin(\pi/10) \times \sin(2\pi/5)[\ 2\sin(\pi/10) + 1\ ]$

2) Calcul de l'aire occupée :

$A_{occupée} = 13 \times A_{él} = 65 \cos(\pi/5) \sin(\pi/5)$

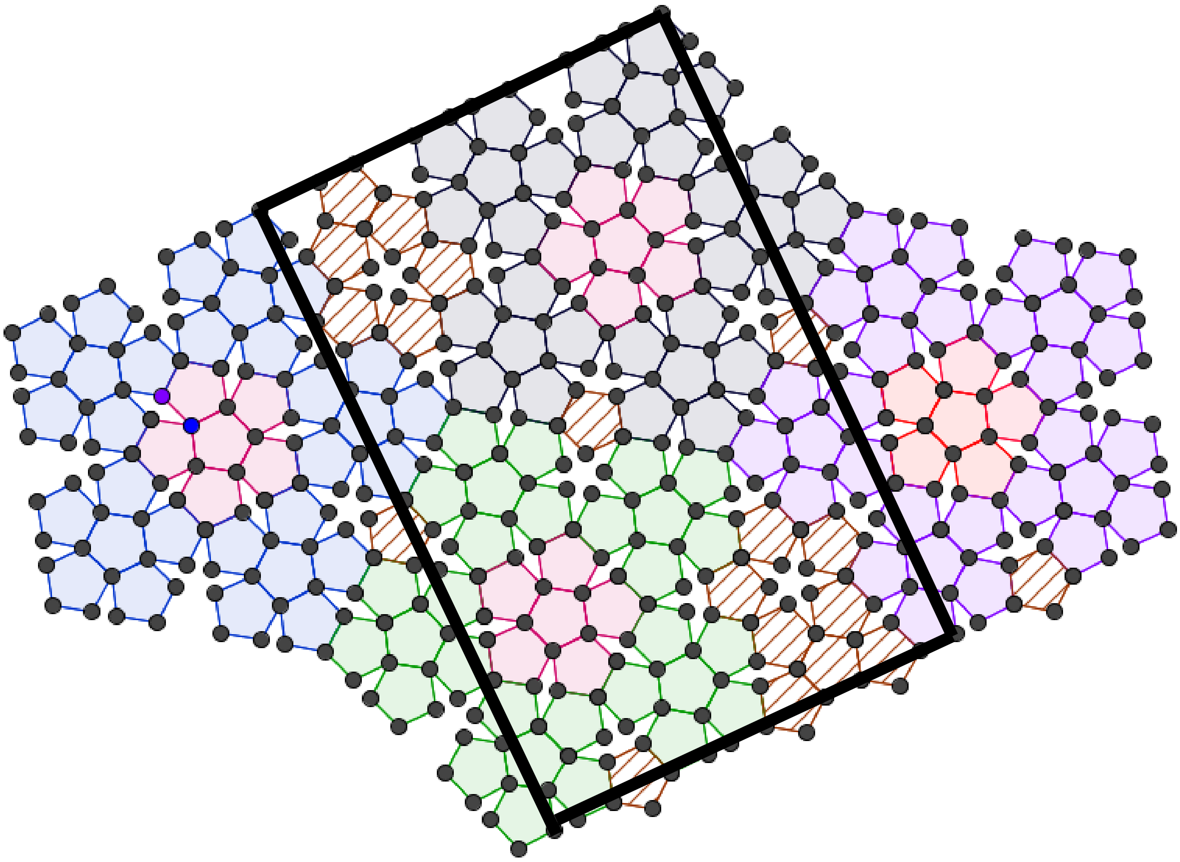
3) Calcul du rapport de l'aire occupée sur l'aire totale :

$\eta = A_{occupée} / [\, A_{occupée} + 7 \times A_{p1} + A_{trapèze}] \times 100 \approx$ **89,82 %**

Le rendement semble donc extrêmement intéressant.

Néanmoins, le problème de la possibilité de réitération se repose : on s'aperçoit en effet que lorsqu'on réitère la figure, si l'on veut éviter des pertes supplémentaires, il faut que les cercles se « chevauchent » ; c'est-à-dire que l'on ne trouve plus de motif répétitif, même s'il est possible d'utiliser cette disposition.

V- Quatrième essai : la mise en abîme



Afin de remédier au problème de réitération tout en conservant un bon rendement, nous avons cherché à « mettre les pentagones en abîme ». En fait, nous avons remarqué que la disposition florale nous donnait une forme pentagonale, avec quelques pertes minimes. Nous avons donc décidé de choisir la disposition en ligne, avec à la place de chaque pentagone élémentaire, une « fleur », elle-même composée de fleurs. Cela nous a permis de combler les pertes supplémentaires avec de petits pentagones.

Cette disposition est réalisée telle que l'on puisse emboîter les pentagones entre eux afin de pouvoir réitérer cette disposition à l'infini.

Légende :

Les pentagones**roses** représentent quelques fleurs élémentaires.

Les fleurs élémentaires sont regroupées en fleurs plus grandes, en **bleu, gris, violet et vert**.

Les pentagones **hachurés** servent à combler les pertes supplémentaires.

Le motif élémentaire est le **rectangle noir** dessiné.

1) Surface occupée

On compte, comme pour la disposition en ligne, deux pentagones formés avec deux mises en abîme florales. Cela représente 72 pentagones. On ajoute ceux qui comblent les pertes : il y a 17, donc en tout, on a 89 petits pentagones dans le motif élémentaire. D'où :

$A_{occupée} = 89 \times A_{él} = 445\cos(\pi/5)\sin(\pi/5)$

2) Surface des pertes

On distingue trois sortes de pertes : les « losanges », les « étoiles » et les « bateaux ».

On compte 5 étoiles, 11 bateaux, 17 losanges.

Grâce à GeoGebra, on peut calculer la surface de ces pertes.

On obtient un rendement aux alentours de **89 %**, avec la possibilité de réitérer cette configuration.

VI- Conclusion

Nous avons donc trouvé quatre options pour disposer les carreaux :

- une disposition en **fleurs**, avec un rendement de **87,5 %** pour une fleur ; mais ce rendement diminue si l'on réitère le motif, et il devient difficilement calculable car au fur et à mesure que l'on itère, il y a la possibilité de combler les pertes avec des pentagones élémentaires.

- une disposition en **lignes**, avec un rendement de **85,4%**, mais que l'on peut facilement réitérer, et qui de plus est simple à disposer.

- une disposition en **cercles**, avec un excellent rendement de **91,3 %.** Mais la réitération entraîne des pertes, si l'on ne fait pas s' « emboîter » les cercles, auquel cas le rendement est meilleur, mais beaucoup plus difficile à calculer. (4)

- une disposition basée sur un système de **mise en abîme** : avec des pentagones élémentaires, on crée des fleurs. Avec ces fleurs, on crée d'autres fleurs, plus grandes, avec lesquelles on crée des lignes. Le rendement, d'environ **89 %**, est très intéressant et la figure peut être réitérée ; elle est cependant plus complexe, mais aussi plus esthétique !

Notes d'édition

(1) Résultat non évident : il convient de démontrer que la disposition florale forme elle-même un grand pentagone, autrement dit, que les côtés des éléments extérieurs sont alignés, avant de parler d'un triangle perdu.

(2) L'idée d'« emboiter » les cercles mérite d'être détaillée.

(3) Sur les trois triangles qui entourent le trapèze, l'un est bleu, l'autre rouge et le troisième blanc. De plus, les deux losanges blancs sont constitués chacun de deux triangles « bleus ».

(4) Précision : le rendement de 91,3 % porte sur un cercle et non sur le pavage complet, qui reste inconnu.