

Opérations dans \mathbb{R} - Équations

On rappelle qu'il y a seulement deux opérations sur les réels : addition et multiplication. Soustraire c'est ajouter l'opposé : $3-5=3+(-5)$, et diviser c'est multiplier par l'inverse : $\frac{3}{5} = 3 \times \frac{1}{5}$. Tous les réels ont un opposé, et tous les réels **sauf** 0 ont un inverse. L'opposé d'une somme est la somme des opposés : $-(a+b) = -a-b$, et l'inverse d'un produit (non nul) est le produit des inverses : $\frac{1}{ab} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{b}$.

Des propriétés de ces deux opérations, découlent les règles de calculs suivantes :

Pour tous réels a, b, c et d :

- si $a = b$ alors $a + c = b + c$ (**on peut ajouter le même nombre de part et d'autre de l'égalité**), il en découle par exemple, que si $a + b = c$ alors $a = c - b$ (en ajoutant $-b$ de part et d'autre).
- si $a = b$ alors $ac = bc$ (**on peut multiplier par le même nombre de part et d'autre de l'égalité**), il en découle par exemple, que si $ab = c$ avec b non nul, alors $a = \frac{c}{b}$ (en multipliant par l'inverse de b de part et d'autre). Réciproquement, si b est non nul et si $\frac{c}{b} = a$ alors $c = ab$ (en multipliant par b). On en déduit également que si b et d sont non nuls alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si et seulement si $ad = bc$ (produit en croix).

Rappels sur les puissances entières :

- *Définition* : si n est un entier positif non nul et x un réel, alors $x^n = x \times \dots \times x$ (n fois), par convention $x^0 = 1$ (même si x est nul!). Si n est un entier positif et x un réel **non nul**, alors x^{-n} est l'inverse de x^n , c'est à dire $x^{-n} = \frac{1}{x^n} (= \frac{1}{x} \times \dots \times \frac{1}{x}, n$ fois). Par exemple, $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$.
- *Propriétés à connaître* : soient x et y des réels, n et m des entiers (éventuellement négatifs si les réels sont non nuls).
 - $(x \times y)^n = x^n \times y^n$; $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$ (y non nul).
 - $x^n \times x^m = x^{n+m}$; $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$.
 - $(x^n)^m = x^{nm}$.

★ Exercice 1 (addition, multiplication)

1/ On désigne par a, b, c, d, e , cinq réels. Effectuer les calculs suivants :

- a) $a + b - (c + d) + (a - d) - (b - c + a) + d$.
- b) $d - [a - (c - b)] - (a + b - d) - (d - b)$.
- c) $a - (c - b) - [(d + a) - (b + c - d)] - (b - d)$.
- d) $a - [e - (d + (b - c) - a)] - (d - c + b)$.
- e) $[(c - b) - (a + d)] - [e - d - (c + a)] - c$.

2/ On désigne par a, b, c, d , quatre réels. Effectuer les calculs suivants :

- a) $(a + b)(2 - c + d)$; $(a - c)(d - c - 5)$.
- b) $(3 - b)(a - d + c)$; $(d + a)(-8 + b + c)$.
- c) $(a - 3)(b + 2) - (c - 5)(d + 1) + 3(b - d)$.
- d) $(c - d)(a - 1) - (b + 2)(d - c) - c(a + b)$.

★ Exercice 2 (développer, factoriser)

1/ Développer :

- a) $(4a - 3b)^2$; $(6y + 5x)^2$; $(5ab - 3c^2)^2$.
- b) $(a + b - c)^2$; $(3a - 2b + c)^2$; $(a + 2b + 3c)^2$.
- c) $(x + y)^3 + (x - y)^3$; $(x^2 + y)^2 + (x^2 - y)^2$; $(x^2 + y)^2 - (x^2 - y)^2$.
- d) $(a - 3b)(a^2 + 3ab + 9b^2)$; $(a + 3b)(a^2 - 3ab + 9b^2)$.
- e) $(1 + x^2)(1 + x\sqrt{3} + x^2)(1 - x\sqrt{3} + x^2)$; $(1 + 3x + 3x^2 + x^3)(1 - 3x^2 - x^3)$.

2/ Factoriser :

- a) $(x + 3)^2 + 2(x + 3)(x - 4) + (x - 4)^2$; $4x^3 + 8x^2y + 4xy^2$.
- b) $5x^3 - 20xy^2$; $81x^4 - 16y^4$; $49x^2y^2 - 100$.
- c) $x^2 - 2xy + y^2 - z^2$; $a^2 - b^2 - c^2 - 2bc$.
- d) $(x + y)^3 - x^3 - y^3$; $x^3 - 27y^3$.
- e) $4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$; $8x^3 + 125$.
- f) $(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4)$.

★ Exercice 3 (manipulation de fractions)

Simplifier les expressions suivantes en précisant le domaine de validité :

- 1/ $\frac{14(6x-7)}{(x-2)(3x+1)} + \frac{3x+4}{(x-2)(2x-5)}$; $\frac{2x+1}{x^2+2x} \times \frac{5x^2+4x}{2x^2+7x+3}$.
- 2/ $\frac{x-4}{x-5} + \frac{x-6}{x-4} + \frac{x-8}{x-3}$.
- 3/ $2\frac{5x-1}{x(2x-1)} - \frac{3x-7}{x(2x+1)} - 3\frac{10x-1}{4x^2-1}$.

★ Exercice 4 (manipulation de puissances)

Effectuer les calculs suivants :

- 1/ $(ab)^3$; $(a^2b)^3$; $(ab^3)^2$.
- 2/ $(2a^2b^3)^3$; $(-3ab^2)^4$; $\left[(a^2b^3)^2\right]^5$.
- 3/ $(3a^3) \times (ab^2)^4$; $(5a^2b)^2 \times (-ab^3)^3$.
- 4/ $\left(\frac{2a^2}{b^3}\right)^2$; $\left(\frac{a^2}{-b^3}\right)^5$.
- 5/ $(3a^2) \times \left(\frac{b^2}{a^3}\right)$; $\left(\frac{2a^3}{b^2}\right) \times \left(\frac{b}{a^5}\right)$.

6/ $\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^2 \times \left(\frac{2a}{b}\right)^3 \times \left(\frac{b^2}{a}\right)^2$; $\left(\frac{ab^2}{a^3}\right)^3 \times \left(\frac{b^2}{a^4}\right)^2$.

7/ $(2ab^{-3})^{-2}$; $(a^2b^{-3})^{-1}$; $[(a^{-3}b^2)^{-2}]^2$.

8/ $(-a^2b^{-1})^{-1} \times (a^{-2}b)^{-2}$; $(5a^{-1}b^2)^2 \times (-a^{-2}b)^{-1}$.

9/ $\left(\frac{a^2}{b}\right)^{-1}$; $\left(\frac{a}{b^{-3}}\right)^{-2}$; $\left(\frac{a}{b^2}\right)^{-3}$.

10/ $(3a^{-2}) \times \left(\frac{b^{-1}}{a^3}\right)^{-2}$; $\left(\frac{a^2b}{a^4}\right)^2 \times \left(\frac{b^{-2}}{a^3b}\right)^{-2}$.

★ Exercice 5 (équations)

1/ Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

a) $3x + 2 = 0$; $\frac{1}{x+3} = \frac{2}{x-1}$; $\frac{x+1}{x-1} = 2$.

b) $\frac{5x+3}{4} - \frac{x-9}{3} = \frac{x}{2} + 5$; $\frac{4x+6}{3} - \frac{x+6}{2} = \frac{5x}{6}$.

c) $\frac{(2x-3)(2x+3)}{8} - \frac{(x+4)^2}{6} = \frac{(x+1)(x-2)}{3}$.

d) $\frac{(x-2)^2}{3} + \frac{(x-5)(x+4)}{2} = \frac{(5x+4)(x-3)}{6} - \frac{20}{3}$.

2/ Même question mais avec un paramètre réel m :

a) $mx - 3m = 3x + 5m - 1$; $mx - 5 = m - 3x$.

b) $m^2(x-1) + 3m = x + 2$; $m^2(x+1) + 3m = x + 4$.

c) $(m+1)x - 2m = x + 2 - \frac{3mx+3m-1}{2}$.

d) $\frac{x+2m}{5} + 2 = \frac{3x-m}{2} + \frac{m}{10} - \frac{m-2x}{20}$.

★ Exercice 6 (équations)

1/ Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

a) $(x+1)(2x+3) + (x+1)^2 = 0$; $x^2 - 4 = (2-x)(3x+2)$.

b) $(2x+5)^2 = (3x+2)^2$; $(2x+1)(x+1)^2 = 4(2x+1)$.

c) $(4x^2 - 3x - 18)^2 - (4x^2 + 3x)^2 = 0$.

d) $(2x+1)(3x+2) + (2x+1)(x-2) - (4x^2 - 1) = 0$.

2/ Même question mais avec un paramètre réel m :

a) $\frac{(m-1)^2x}{6} + \frac{2}{3} + \frac{2x+1}{6} = 3x + \frac{m}{6}$.

b) $\frac{mx+2}{3-x} = 4$.

c) $(m+3)x + \frac{5x-1}{2} = 3x - 4$.

★ Exercice 7 (second degré)

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1/ $-3x^2 + 9x - 6 = 0$; $x^2 - 4x - 6 = 0$.

2/ $x^2 - 7x + 10 = 0$; $5x^2 + (4x - 7) = 0$.

3/ $2x^2 - 2\sqrt{3}x + \sqrt{2} = 0$; $x^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{18})x + 6 = 0$.

4/ $\frac{3x^2}{4} + \frac{x}{3} - \frac{1}{5} = 0$; $\frac{x^2}{2} - 7x + 1 = 0$.

5/ $\frac{2x+5}{x-2} - \frac{3x-6}{x+4} = 2$; $\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$

6/ $\frac{10x^2+23x-11}{16x^2+62x+55} = -2$.

7/ $x^4 + 3x^2 = -2$; $x^4 + 3x^2 = 2$.

8/ $(x^2 - 4x - 1)^2 - (6x^2 - 3x - 1)^2 = 0$; $(x^2 - 12x + 7)^2 - (2x^2 - 5x + 7)^2 = 0$.

9/ $(m-2)x^2 + 5x + 7 - m = 0$; $(m+1)x^2 + (2m+1)x + 2 - m = 0$.

★ Exercice 8

Déterminer les réels x et y de somme S et de produit P dans les cas suivants :

1/ $S = 9$ et $P = 18$; $S = 6$ et $P = 135$.

2/ $S = 2$ et $P = 2$; $S = 2$ et $P = 1$.

3/ $S = \frac{8m+1}{m}$ et $P = \frac{16m+4}{m}$; $S = \frac{2m+3}{m+1}$ et $P = \frac{2}{m+1}$

4/ $S = \frac{4m}{1-2m}$ et $P = 1$; $S = 2m$ et $P = m^2 - 4$.

★ Exercice 9 Pour x réel on pose $f(x) = 3x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 7x + 3$.

1/ pour $x \neq 0$, exprimer $\frac{f(x)}{x^2}$ en fonction de $y = x + \frac{1}{x}$.

2/ En déduire un procédé de résolution de l'équation $f(x) = 0$.

Ordre dans \mathbb{R} - Inéquations

On rappelle que $x \leq y$ signifie que le réel x est inférieur **ou égal** à y , à ne pas confondre avec $x < y$ qui signifie que le réel x est inférieur **et non égal** à y . Si $x < y$ alors on a forcément $x \leq y$ mais **la réciproque est fautive**. Deux propriétés fondamentales de l'inégalité sont à connaître, une concerne l'addition et l'autre la multiplication. Soient x , y et z des réels :

– Si $x \leq y$ alors $x + z \leq y + z$: **on peut ajouter un même réel de part et d'autre d'une inégalité.**

– Si $x \leq y$ et si z est **positif**, alors $xz \leq yz$: **on peut multiplier par un même réel positif de part et d'autre d'une inégalité.** Par contre, si $x \leq y$ et si z est **négatif**, alors $xz \geq yz$: **multiplier par un même réel négatif de part et d'autre d'une inégalité change le sens de celle-ci.**

De ces deux propriétés découlent les deux suivantes. Soient x , y , a et b des réels :

- Si $x \leq y$ et $a \leq b$ alors $x + a \leq y + b$: **on peut ajouter membre à membre deux inégalités de même sens.**
- Si $0 \leq x \leq y$ et $0 \leq a \leq b$ alors $xa \leq yb$: **on peut multiplier membre à membre deux inégalités de même sens lorsque les quatre membres sont positifs.**

★ **Exercice 10** Résoudre les inéquations :

- 1/ $5 - 3x \geq x + 1$; $7x - \frac{x+1}{2} < \frac{1-3x}{5}$; $x - \frac{x-2}{3} > \frac{1}{2} + x$.
- 2/ $\frac{x+1}{4} \leq \frac{1-3x}{5} + \frac{1-x}{10}$; $\left(\frac{x+5}{2}\right)^2 \leq \frac{x^2+25}{2}$.
- 3/ $(x-1)(1-3x) < 0$; $(x-2)(4-3x) \geq 0$; $(4x-1)(x-2)(x+1)(2-3x) > 0$.
- 4/ $\frac{x}{x-2} \leq 3$; $\frac{x}{x-2} > 3$.
- 5/ $\frac{3x}{x-1} < -1$; $\frac{3x-2}{5-3x} \geq 1$.
- 6/ $\frac{x+1}{x} \geq \frac{x-1}{2x}$; $\frac{x+1}{x-1} > \frac{x+3}{x+1}$.
- 7/ $\frac{(x+1)(x-2)}{2x-3} \geq 0$; $\frac{(1-x)(x+2)}{x} < 0$.

★ **Exercice 11** Résoudre et discuter les inéquations d'inconnue x :

- 1/ $\frac{(m-3)x}{2m} \geq \frac{1-x}{2} - \frac{x-1}{m}$.
- 2/ $\frac{2-x}{m-1} + \frac{1+x}{m+1} < \frac{(m+1)x}{m^2-1}$.
- 3/ $\frac{x-1}{x-2} - \frac{x-2}{x-3} > \frac{x-m}{x-m-1} - \frac{x-m-1}{x-m-2}$.
- 4/ $(m-2)(m-3) \leq (x^2-2)(x^2-3)$.
- 5/ $\frac{x^2+ax+a^2}{x^2+bx+b^2} > \frac{x+a}{x+b}$.

★ **Exercice 12** Résoudre les inéquations :

- 1/ $x^2 - 3x < 3$; $x^2 - x - 1 > 0$.
- 2/ $x^2 + 1 \geq 3x - 3$; $2x - 1 \leq x^2 + 4$.
- 3/ $-5x^2 + 3x + 1 < 0$; $x^2 - 19x + 84 < 0$.
- 4/ $(3x-1)(x-5) \leq 0$; $(5-2x)(3+x) > 0$.
- 5/ $x^2 - 9 < 0$; $16 - x^2 \leq 0$.
- 6/ $(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 4x + 3) > 0$; $(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 9x + 14) \leq 0$.
- 7/ $\frac{1}{x-1} \leq \frac{3}{x-2}$; $\frac{4}{x} + \frac{1}{x-2} \geq 1$.
- 8/ $\frac{1}{x} - \frac{1}{2x-1} < \frac{1}{4x^2}$; $x^4 + 3x^2 - 2 > 0$.

Valeur absolue - Racine carrée

Rappels sur la valeur absolue :

- **Définition** : la valeur absolue d'un réel x (notée $|x|$) est le maximum entre x et $-x$, autrement dit, $|x| = x$ quand x est positif ou nul, et $|x| = -x$ quand x est négatif. Géométriquement, sur un axe gradué, $|x|$ est la distance du point d'abscisse x à l'origine de repère.
- **Propriétés à connaître** :
 - Une valeur absolue est positive. Si $|x| = 0$ alors $x = 0$.
 - $|xy| = |x| \times |y|$ (en particulier $|-x| = |x|$), et $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.
 - $|x + y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire).
 - Se « débarrasser » d'une valeur absolue :
 - * Dans une égalité : $|x| = a$ équivaut à $a \geq 0$ et $(x = a \text{ ou } x = -a)$.
 - * Dans une inégalité :
 - $|x| \leq a$ équivaut à $-a \leq x \leq a$ (pas de solution si $a < 0$);
 - $|x| \geq a$ équivaut à $x \leq -a$ ou $x \geq a$.

Rappels sur la racine carrée :

- **Définition** : pour tout réel **positif** a , l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions opposées. On appelle racine carrée de a celle des deux qui est positive et on la note \sqrt{a} . Autrement dit, $x = \sqrt{a}$ signifie que $x \geq 0$ et $x^2 = a$.
- **Propriétés à connaître** :
 - Une racine carrée est positive. Si $\sqrt{x} = 0$ alors $x = 0$.
 - Si x et y sont positifs : $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$, et $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$.
 - Pour tout réel x , $\sqrt{x^2} = |x|$ (attention à ne pas oublier la valeur absolue quand x est négatif!).
 - Se « débarrasser » d'une racine carrée :
 - * Dans une égalité : $\sqrt{x} = a$ équivaut à $a \geq 0$ et $x = a^2$.
 - * Dans une inégalité :
 - $\sqrt{x} \leq a$ équivaut à $a \geq 0$ et $x \geq 0$ et $x \leq a^2$;
 - $\sqrt{x} \geq a$ équivaut à $x \geq 0$ et $x \geq a^2$ lorsque a est positif (si a est négatif, l'inégalité équivaut simplement à $x \geq 0$).

★ **Exercice 13** Résoudre dans \mathbb{R} :

$$1/ x + 1 - \sqrt{4x - 15} = 4; \quad \sqrt{16x - 7} = 8\sqrt{x - 4}.$$

$$2/ \sqrt{2x + 5} - \sqrt{x + 3} = 2; \quad \sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 12} = \sqrt{x + 12}.$$

$$3/ \sqrt{x + 5} + \sqrt{x + 3} = 5; \quad \sqrt{x + 12} + \sqrt{x - 14} = \sqrt{x - 4}.$$

$$4/ 2(x + 4) + \sqrt{x(x + 6)} = 16; \quad \sqrt{x - 9} + \sqrt{x - 24} = x.$$

$$5/ \sqrt{2x + 7} + 3 = 3(x + 1); \quad \sqrt{x + 18} + \sqrt{x - 8} = \sqrt{x + 2}.$$

$$6/ x + 1 < \sqrt{x + 4}; \quad x - 1 < \sqrt{x^2 - 2}.$$

$$7/ x - 3 \geq \sqrt{x^2 - 2x}; \quad 2x - \sqrt{x} - 1 < 0.$$

$$8/ \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \leq 1 - x.$$

★Exercice 14 Résoudre dans \mathbb{R} :

$$1/ |x - 1| + x^2 - 3x = 0; \quad |x| + |x - 1| = 1.$$

$$2/ ||x| - |x - 1|| = 1; \quad |x| + |x + 1| + |x - 1| = 2.$$

$$3/ |-3x + 2| + |2x - 3| = 5; \quad |2x + 4| + |-2x + 7| = 8.$$

$$4/ ||x - 1| - |3 - x|| = 16; \quad |x| - |x - 1| = 1.$$

$$5/ |(x - 3)(x - 5)| > x - 3; \quad |x| + |x - 1| + |x - 2| \leq 6.$$

$$6/ (|x| - 3)(|x| - 5) > 0; \quad (|x| - 3)(|x| - 5) \leq \frac{|x| - 5}{|x| - 3}.$$

$$7/ |1 - x| \geq 2|x| - 1; \quad |x + 2| \geq \frac{1 - x}{1 + x}.$$