0. Rédaction et Calculs, méthodologie

Cette méthodologie est un rappel des habitudes de calculs que vous devriez avoir ! Certains conseils pourront vous sembler naïfs mais ils vous permettront d'éviter de nombreuses étourderies en devoir... Ce document est loin d'être exhaustif mais regroupe les fautes les plus rencontrées en devoir.

I. Brouillon et rédaction

Tout d'abord des conseils généraux. Quand on cherche un exercice/problème, **il est obligatoire d'avoir devant soi une feuille et un stylo à la main !** Chercher « de tête » peut fonctionner pour des exercices très simples mais est en général le meilleur moyen pour faire des étourderies et/ou n'avoir aucune idée et ne pas réussir à avancer.

Il est donc très fortement conseillé d'utiliser un brouillon. Il ne faut pas le voir comme une feuille où l'on écrit proprement des calculs que l'on recopie ensuite au propre sur sa copie ! **Le brouillon est utilisé pour trouver des idées et doit donc être utilisé jusqu'à ce que vous soyez convaincu que vous partez dans la bonne direction.** Rédiger proprement au brouillon est donc inutile et une grosse perte de temps (vous perdez deux fois plus de temps).

Une fois que vous avez l'impression que vous savez comment partir dans la bonne direction, **vous devez rédiger directement au propre vos calculs car le correcteur doit pouvoir relire les étapes de calcul intermédiaires**.

Ne faites qu'une transformation/simplification à la fois pour éviter les étourderies et pour que le correcteur puisse vous relire ! **Il est également impératif d'aligner vos égalités et de n'écrire qu'une égalité par ligne**, c'est à dire de les présenter ainsi :

$$\begin{aligned} \dots &= \dots \\ &= \dots \\ &= \dots \\ &= \dots \end{aligned}$$

et non pas ainsi $\dots = \dots = \dots = \dots = \dots$ pour ne pas perdre en lisibilité.

Ainsi, n'hésite pas à espacer (dans la mesure du raisonnable) au maximum vos calculs plutôt qu'à absolument chercher à les faire tenir dans la page ! Passez à la page suivante, en faisant attention car **c'est souvent en changeant de page que l'on fait une erreur d'étourderie !** Pour éviter cela, on peut parfois juste recopier la ligne de calcul de bas de page en haut de la suivante...

A la fin du calcul, on souligne/encadre le résultat trouvé. Cela permet de prendre un peu de temps pour vérifier qu'il s'agissait bien du résultat demandé et permet de prendre un peu de recul sur le sujet.

II. Simplification et factorisation des expressions

On doit souvent dans les calculs simplifier des expressions ou les transformer en plusieurs parties pour ensuite étudier de manière séparée chacun des termes.

(m) Avant de tout développer, on essaye de **factoriser au maximum** quand cela est possible afin de manipuler des expressions les plus courtes possibles. De la même manière, si dans une fraction des termes identiques apparaissent au numérateur et au dénominateur, on les simplifie afin de ne pas trainer une expression trop lourde pendant tout le calcul.

Exercice d'application 1. Simplifier les expressions suivantes :

1. $\dfrac{1}{2n+1}+\dfrac{1}{n}-\dfrac{5}{4n+2}$
2. $\dfrac{1}{2a+2}-\dfrac{1}{2a+1}+\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{1}{a}$

(m) Quand on demande de faire apparaitre une forme particulière dans un énoncé, par exemple transformer une expression $A+B$ en C, on part en général de $A+B$ et on regroupe/factorise/simplifie les termes qui se ressemblent afin de faire apparaitre C...

Exercice d'application 2. Montrer que :

1. $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.
2. $\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=\dfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$.

(m) Quand on divise par une variable dans une équation afin de la simplifier, il faut toujours bien justifier que cette variable ne peut pas s'annuler sinon on rate des solutions. Le mieux est de procéder par disjonction de cas en étudiant d'abord le cas où la variable s'annule (par exemple, si $x=0$), puis celui où elle ne s'annule pas (ici si $x\neq 0$).

Exercice d'application 3. On suppose $x\neq 2$ et on pose $y=\dfrac{2x+1}{x-2}$.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de y peut-on exprimer x en fonction de y ?.
2. Est-il possible que y prenne cette/ces valeur(s) ?

III. Parenthèses

Il est essentiel de ne pas oublier les parenthèses dans les calculs, en particulier quand des signes $-$ apparaissent. L'erreur la plus fréquente est dans la manipulation de fractions où $-\dfrac{a+b}{c}$ se transforme souvent en $\dfrac{-a+b}{c}$ au lieu de $\dfrac{-a-b}{c}$... Ainsi par exemple, l'écriture $2\times -a+b$ n'a aucun sens car on ne sait pas si l'on parle de $2\times(-a)+b=-2a+b$ ou de $2\times(-a+b)=-2a+2b$, d'où l'importance des parenthèses !

Exercice d'application 4. Soient x, y différents de 2 tels que $\dfrac{2x+1}{x-2}=\dfrac{2y+1}{y-2}$. Montrer, en mettant tout au même dénominateur, que $x=y$.

IV. Inégalités

(m) Quand on multiplie/divise par une variable dans une inégalité, il faut faire très attention à son signe. En effet, si elle peut être négative, le sens de l'inégalité change alors... Il est donc important de faire une disjonction de cas selon le signe de cette variable. Il est souvent plus simple/rapide de tout passer du même côté de l'inégalité et de factoriser pour faire ensuite un tableau de signes.

Exercice d'application 5. Pour quelles valeurs de x a-t-on :

1. $3x\ln(x)\leq(x^2+1)\ln(x)$?
2. $\cos^2(x)\leq\cos(x)$?

V. Correction des exercices

Exercice d'application 1. Simplifier les expressions suivantes :

1. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{n}-\frac{5}{4n+2} &= \frac{1}{n}+\frac{2-5}{4n+2}\\
&= \frac{1}{n}-\frac{3}{4n+2}\\
&= \frac{4n+2-3n}{n(4n+2)}\\
&= \frac{n+2}{2n(2n+1)}.
\end{aligned}$$

2. De même :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2a+2}-\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a} &= \frac{1}{2a+2}+\frac{2}{2a+2}-\frac{a}{a(2a+1)}-\frac{2a+1}{a(2a+1)}\\
&= \frac{3}{2a+2}-\frac{3a+1}{a(2a+1)}\\
&= \frac{3a(2a+1)-(3a+1)(2a+2)}{2a(a+1)(2a+1)}\\
&= \frac{6a^2+3a-6a^2-6a-2a-2}{2a(a+1)(2a+1)}\\
&= \frac{-5a-2}{2a(a+1)(2a+1)}.
\end{aligned}$$

Exercice d'application 2.

1. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 &= \frac{(n+1)}{6}\times(n(2n+1)+6(n+1))\\
&= \frac{(n+1)}{6}\times(2n^2+7n+6).
\end{aligned}$$

   On peut alors vérifier que $(n+2)(2n+3)=2n^2+7n+6$, ce qui termine le calcul.

2. De la même façon :

$$\begin{aligned}
\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3 &= \frac{(n+1)^2}{4}\times(n^2+4(n+1))\\
&= \frac{(n+1)^2}{4}\times(n^2+4n+4)\\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.
\end{aligned}$$

Exercice d'application 3. On suppose $x\neq 2$ et on pose $y=\dfrac{2x+1}{x-2}$.

1. On a :

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x+1}{x-2} \\ \Leftrightarrow & \Leftrightarrow y(x-2) = 2x+1 \\ \Leftrightarrow & \; yx - 2x = 2y+1 \\ \Leftrightarrow & \; x(y-2) = 2y+1. \end{aligned}$$

   Si $y \neq 2$, on a alors $x = \dfrac{2y+1}{y-2}$. Si $y = 2$, on a $0 = 5$ et donc une absurdité !
2. Cette remarque répond à la seconde question. y ne peut pas prendre la valeur 2, sinon on a une absurdité.

Exercice d'application 4. Soient x, y différents de 2 tels que $\dfrac{2x+1}{x-2} = \dfrac{2y+1}{y-2}$. On a alors :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{2y+1}{y-2} - \frac{2x+1}{x-2} \\ &= \frac{(2y+1)(x-2) - (2x+1)(y-2)}{(y-2)(x-2)} \\ &= \frac{2xy + x - 4y - 2 - (2xy + y - 4x - 2)}{(y-2)(x-2)} \\ &= \frac{5x - 5y}{(y-2)(x-2)} \\ &= \frac{5(x-y)}{(y-2)(x-2)}. \end{aligned}$$

On a donc bien $x - y = 0$, soit $x = y$.

Exercice d'application 5.

1. Pour que $\ln(x)$ soit bien défini, il faut $x > 0$. Pour $x = 1$, $\ln(x) = 0$ donc l'inégalité est vérifiée.

   Pour $x > 1$, on a $\ln(x) > 0$ et l'inégalité de l'énoncé est équivalente à $3x \leq x^2+1 \Leftrightarrow x^2-3x+1 \geq 0$. Or, le discriminant de cette équation est $9 - 4 = 5 > 0$ donc on a deux racines réelles $x_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < 1$ et $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$. Puisque le coefficient en x^2 est positif, on en déduit que cette fonction polynômiale est positive sur $]-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty[$. Or, on est dans le cas où $x > 1$ et $x_1 < 1$. On en déduit qu'on ne garde que la solution $[x_2, +\infty[$.

   Pour $0 < x < 1$, l'inégalité est équivalente à $3x \geq x^2 + 1$. En reprenant l'étude précédente, ceci est vérifié pour $x \in [x_1, x_2]$. Puisque $0 < x_1$ et $1 < x_2$, on ne garde que $[x_1, 1[$ comme solution.

   On en déduit que l'ensemble des solutions est $[x_1, 1] \cup [x_2, +\infty[$.

   On aurait aussi pu écrire que :

$$\begin{aligned} 3x\ln(x) \leq (x^2+1)\ln(x) &\Leftrightarrow (x^2 - 3x + 1)\ln(x) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x - x_1)(x - x_2)\ln(x) \geq 0. \end{aligned}$$

   Si on note $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ln(x)$, on obtient alors le tableau de signe suivant :

x	0		x_1		1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\ln(x)$	$\Vert$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

On retrouve bien le même ensemble de solutions.

2. On a $\cos^2(x) \leq \cos(x) \Leftrightarrow 0 \leq \cos(x)(1 - \cos(x))$. Or, on a $1 - \cos(x) \geq 0$. De plus, $1 - \cos(x)$ ne s'annule que quand $\cos(x) = 1$, ce qui est un cas particulier de quand $\cos(x) \geq 0$. Il ne reste donc qu'à regarder quand $\cos(x) \geq 0$, ce qui est vrai quand $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ modulo 2π. L'ensemble des solutions est donc $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$.

   On aurait aussi pu résoudre par 2π périodicité que sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ en disant que si $x = -\frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$ (si $\cos(x) = 0$), l'inégalité est vraie. Si $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ (donc si $\cos(x) < 0$) on a alors $\cos(x) < 0$ et l'inégalité est alors équivalente à $\cos(x) \geq 1$, ce qui n'est vrai que quand $x = 0$: absurde !

   Il ne reste donc plus que le cas où $\cos(x) > 0$, c'est à dire quand $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et l'inégalité est équivalente à $\cos(x) \leq 1$, qui est toujours vraie. On retrouve donc le même ensemble de solutions.